EOQ

连续时间和产品
需求速率恒定
离散订货

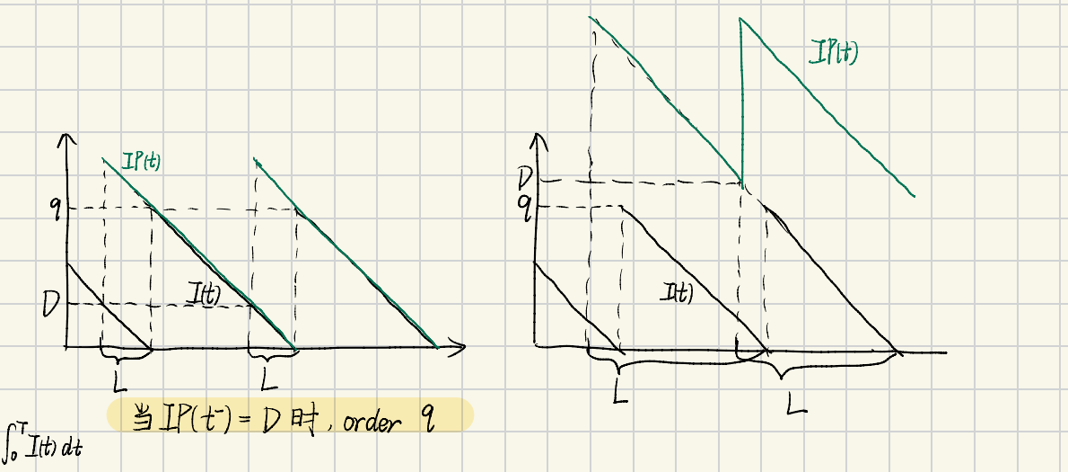
① 初始模型 符号解释
λ：单位 time 需求数量
L：提前期
$D = \lambda \times L$：提前期所消耗的货物
q：订货量　k：每次订货要支付的固定费用
c：货物单价　h：每单位个产品存单位时间的费用

I(t)：当下库存　IP(t)：I(t) + 未到的货
I(t⁻)：在这个时间点上有到货，到货之前的库存

$q^* = \sqrt{\frac{2k\lambda}{h}}$（结论）

Zero-inventory property 零库存定理
：库存↓0 时到货
直观理解：这样可以 min 存货成本

Assumptions：有固定的 q
不缺货



当 IP(t⁻) = D 时，order q

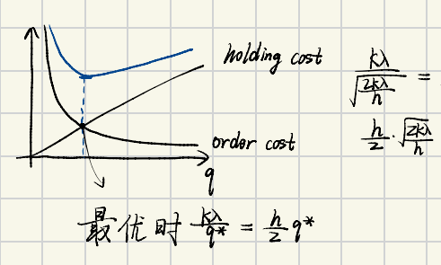
表达式

$$C(q) = \lim_{T\to\infty} \frac{(k+cq)\times \#\text{orders in }(0,T) + h\int_0^T I(t)\,dt}{T}$$

$$\min C(q) = \underbrace{(k+cq)\cdot\overline{OF}}_{\text{order cost}} + \underbrace{h\,\overline{I}}_{\text{holding cost}} = c\lambda + \boxed{\frac{k\lambda}{q} + \frac{h}{2}q} \Rightarrow q^* = \sqrt{\frac{2k\lambda}{h}} \qquad C(q^*) = c\lambda + \sqrt{2k\lambda h}$$

$\overline{OF} \to \left(\frac{q}{\lambda}\right)^{-1}$　$\overline{I} \to \frac{q}{2}$ 平均库存量

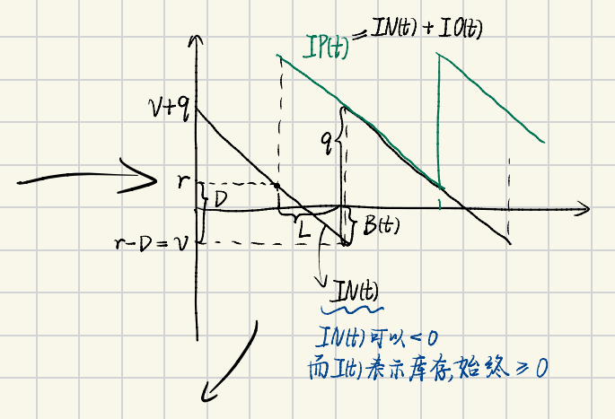
$\frac{q}{\lambda}$ 表示我订的东西多久
会消耗完，即多久订一次东西
取倒数后含义为单位时间的 order #



$\frac{k\lambda}{\sqrt{\frac{2k\lambda}{h}}} = \sqrt{\frac{k\lambda h}{2}}$
$\frac{h}{2}\cdot\sqrt{\frac{2k\lambda}{h}} = \sqrt{\frac{k\lambda h}{2}}$

最优时 $\frac{k\lambda}{q^*} = \frac{h}{2}q^*$

缺货回补 ②
允许缺货
b：每单位需求不能被满足等候单位时间的费用
I(t)：当前库存量
B(t)：拖欠订单量
IN(t)：I(t) − B(t)　净库存（库存水平）
IO(t)：在时间 t 时已下单但尚未收到的订单量
IP(t)：库存位势



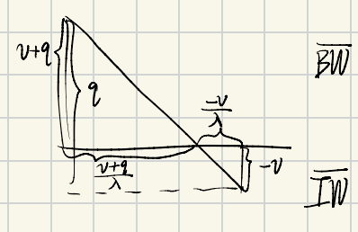
IN(t) 可以 < 0
而 I(t) 表示库存，始终 ≥ 0

对 v 取值的限制 $\begin{cases} \text{Zero-I}: v \le 0 \\ \text{不可能一定缺货}: v+q > 0 \end{cases}$

Conservation-of-flow Law：
$IN(t+L) = IN(t) + IO(t) - D = IP(t) - D$

Space & time

平均等候时间 $\overline{BW}$
产品平均持有时长 $\overline{IW}$



$\overline{BW} = 0\times\frac{v+q}{q} + \left(\frac{-v}{\lambda}\right)\times\frac{1}{2}\times\frac{-v}{q} = \frac{v^2}{2\lambda q}$

$\overline{IW} = 0\times\frac{-v}{q} + \frac{v+q}{\lambda}\cdot\frac{1}{2}\times\frac{v+q}{q} = \frac{(v+q)^2}{2\lambda q}$

观察到 $\overline{I} = \lambda\cdot\overline{IW}$
$\overline{B} = \lambda\cdot\overline{BW}$

优化数量与优化时间一致

表达式

$\min_q C(q) = (k+cq)\overline{OF} + h\overline{I} + b\overline{B}$　— 每单位个产品缺单位时间惩罚 b

$\overline{OF} = \frac{\lambda}{q}$；$\overline{I} = \frac{v+q}{2}\times\frac{v+q}{q} + 0\times\frac{-v}{q} = \frac{(v+q)^2}{2q}$；平均缺货量 $= 0\times\frac{v+q}{q} + \left(\frac{-v}{2}\right)\times\frac{-v}{q} = \frac{v^2}{2q}$

$= c\lambda + \frac{k\lambda}{q} + h\cdot\frac{(v+q)^2}{2q} + b\frac{v^2}{2q}$

最优解：
$q^* = \sqrt{\frac{2k\lambda}{hw}} > \sqrt{\frac{2k\lambda}{h}}$
$v^* = -(1-w)q^*$
$C^* = C(v^*, q^*) = c\lambda + \sqrt{2k\lambda hw}$
其中 $w = \frac{b}{b+h}$

推导　from HW2 Q1 (a)

$C(v,q) = (k+cq)\frac{\lambda}{q} + \frac{h(v+q)^2}{2q} + \frac{bv^2}{2q}$
$= \frac{k\lambda}{q} + c\lambda + h\cdot\frac{v^2+2vq+q^2}{2q} + \frac{bv^2}{2q}$
$= \frac{k\lambda + \frac{(h+b)}{2}v^2}{q} + c\lambda + hv + \frac{h}{2}q$

$\frac{\partial C(v,q)}{\partial q} = -\frac{k\lambda + \frac{(h+b)}{2}v^2}{q^2} + \frac{h}{2} = 0 \Rightarrow q^2 = \frac{2k\lambda + (h+b)v^2}{h}$
$\frac{\partial C(v,q)}{\partial v} = \frac{h+b}{q}v + h = 0 \Rightarrow v = -h\cdot\frac{q}{h+b}$
$\Rightarrow q^* = \sqrt{\frac{2k\lambda(h+b)}{hb}} = \sqrt{\frac{2k\lambda}{hw}}$
$v^* = -h\cdot\sqrt{\frac{2k\lambda}{hb(h+b)}} = -(1-w)q^*$

Constrained stockouts 有限缺货 ③
限制缺货频率
$\overline{A}$：长期缺货时间比例，缺货频率

$A(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } IN(t) \le 0 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$　$\overline{A} = \frac{-v}{q}$

平均每单位时间的缺货的需求数量为 $\lambda\overline{A} = \overline{B}$

限制 $\overline{A} \le 1-w_-$　给定一个最多缺货时间占比

缺货就摆了不补

表达式

$\min C_{cons}(v,q) = (k+cq)\overline{OF} + h\overline{I}$
$= c\lambda + \frac{k\lambda}{q} + h\frac{(v+q)^2}{2q}$

$q^* = \sqrt{\frac{2k\lambda}{hw_-^2}}$
$v^*(q) = -q(1-w_-)$

推导

$\left(c\lambda + \frac{k\lambda}{q} + h\frac{v^2+2vq+q^2}{2q}\right)'_v = \frac{hv}{q} + h > 0 \Rightarrow v$ 越小越好

$\frac{-v^*(q)}{q} = \overline{A} \Rightarrow v^*(q) = -q(1-w_-)$

把 $v^*(q)$ 反代至 $C_{cons}(v,q)$ 有 $q^* = \sqrt{\frac{2k\lambda}{hw_-^2}}$

按缺货频率降下神罚 ④
Cost for backorder occurrences

表达式 $C(v,q) = \min\,(k+cq)\overline{OF} + h\overline{I} + b\overline{A}$　— 单位缺货时长惩罚 b

最优解：$v^*(q) = \frac{b}{h} - q$
$C(v^*(q), q) = (c\lambda + b) + \frac{2k\lambda h - b^2}{2hq}$

$\begin{cases} 2k\lambda h > b^2: & q\uparrow\ C(v,q)\downarrow\ \text{而不管订多少，}C\text{ 都大于不订的成本 } b \text{ 故不订} \\ 2k\lambda h < b^2: & q = \frac{b}{h} \Rightarrow v^*(q) = 0\ \text{即不缺货，问题转化为基础 EOQ} \end{cases}$

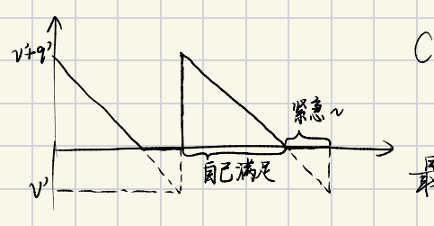
推导　$\text{Min } (cq+k)\overline{OF} + h\overline{I} + b\overline{A}$

$C(v,q) = (cq+k)\frac{\lambda}{q} + h\frac{(v+q)^2}{2q} + b\frac{-v}{q}$
$= c\lambda + \frac{k\lambda}{q} + h\frac{v^2+2vq+q^2}{2q} - \frac{vb}{q}$
$= c\lambda + \frac{k\lambda}{q} + \frac{h}{2q}v^2 + hv + \frac{hq}{2} - \frac{b}{q}v$

$\frac{\partial(v,q)}{\partial v} = \frac{h}{q}v + h - \frac{b}{q} = 0 \Rightarrow v^*(q) = \frac{b}{h} - q$
$\Rightarrow C(v,q) = (c\lambda + b) + \frac{2k\lambda h - b^2}{2hq}$　$\frac{\partial C(v,q)}{\partial q} = \left(\frac{k\lambda - \frac{b^2}{2h}}{q}\right)' = \frac{\frac{b^2}{2h} - k\lambda}{q^2} > 0$

q 越小越好
& $v \le 0$

紧急供应商 ⑤
Lost Sales
库存为 0，找超级飞侠



$C(v', q') = ((q'+v')c + k)\overline{OF} + h\overline{I} + b\lambda\overline{A}$　— 每单位需求成本为 b
$\overline{OF} \to \frac{\lambda}{q}$　$\overline{I} \to \frac{(v+q)^2}{2q}$　$\overline{A} \to \frac{-v}{q}$

最优解：abandon 生意 or 永远不呼叫汪汪队

推导 $\Rightarrow C(v,q) = (cv+cq+k)\frac{\lambda}{q} + h\cdot\frac{(v+q)^2}{2q} + b\lambda\frac{-v}{q}$
$= \frac{c\lambda}{q}v + c\lambda + \frac{k\lambda}{q} + \frac{h}{2q}v^2 + hv + \frac{h}{2}q - \frac{b\lambda}{q}v$

$\frac{\partial C(v,q)}{\partial v} = \frac{c\lambda}{q} + \frac{h}{q}v + h - \frac{b\lambda}{q} = 0 \Rightarrow v^*(q) = \frac{(b-c)\lambda}{h} - q$

$\Rightarrow C(q) = \frac{c\lambda}{q}\cdot\left(\frac{(b-c)\lambda}{h} - q\right) + c\lambda + \frac{k\lambda}{q} + \frac{h}{2q}\left(\frac{(b-c)\lambda}{h} - q\right)^2 + h\left(\frac{(b-c)\lambda}{h} - q\right) - \frac{hq}{2} - \frac{b\lambda}{q}\left(\frac{(b-c)\lambda}{h} - q\right)$
$= -\frac{2(b-c)^2\lambda^2}{2qh} + \frac{k\lambda}{q} + \frac{(b-c)^2\lambda^2}{2qh} - (b-c)\lambda + (2b-c)\lambda$
$= -\frac{(b-c)^2\lambda^2}{2qh} + \frac{k\lambda}{q} + b\lambda = \frac{k\lambda - \frac{(b-c)^2\lambda^2}{2h}}{q} + b\lambda$

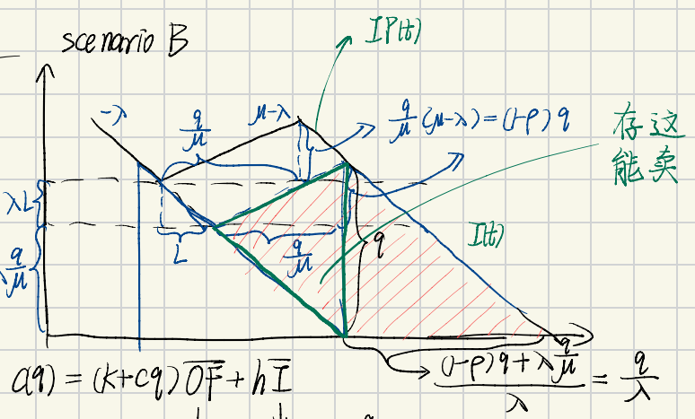
$\frac{\partial C(q)}{\partial q} = \frac{(b-c)^2\lambda - 2hk)\lambda}{2hq^2}$　代入得 $(b-c)^2\lambda - 2kh > 0$　故 C 随 q 单调↑

因此，最优策略是不找紧急供应商，使用 $q^* = \sqrt{\frac{2k\lambda}{h}}$ 来计算总成本
$C^* = \sqrt{2k\lambda h} + c\lambda$

整批完成前不可用 ⑦
等父亲全整理完再发你们

Def：Setup time 冷却时间
米莱秋生产小兵有冷却时间限制
⇓
Zero-I ⟶ 导致 $q \ge q(\tau)$

scenario B



$C(q) = (k+cq)\overline{OF} + h\overline{I}$
$\overline{OF} \to \frac{\lambda}{q}$　$\overline{I} \to \frac{(1-\rho)q + \lambda\frac{q}{\mu}}{\frac{q}{\lambda}}$… $= \frac{q}{2} + \frac{\rho q}{2} = \frac{(1+\rho)q}{2}$

故 $C(q) = (k+cq)\frac{\lambda}{q} + \frac{(1+\rho)qh}{2}$
$\frac{\partial C(q)}{\partial q} = -\frac{k\lambda}{q^2} + \frac{(1+\rho)h}{2} \Rightarrow q^* = \sqrt{\frac{2k\lambda}{(1+\rho)h}}$

考虑 Set up time τ
$\frac{q}{\lambda} - \frac{q}{\mu} \ge \tau \Rightarrow q \ge \frac{\lambda\tau}{1-\rho}$
故 $q = \max\left(\frac{\lambda\tau}{1-\rho}, \sqrt{\frac{2k\lambda}{(1+\rho)h}}\right)$

$\left.\begin{aligned} q_B^* &= \sqrt{\frac{2k\lambda}{(1+\rho)h}} \\ C(q_B^*) &= c\lambda + \sqrt{2k\lambda h(1+\rho)} \end{aligned}\right\}$ when $\sqrt{\frac{2k\lambda}{(1+\rho)h}} > \frac{\lambda\tau}{1-\rho}$

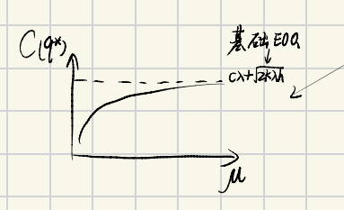
$\left.\begin{aligned} q_B^* &= \frac{\lambda\tau}{1-\rho} \\ C(q_B^*) &= c\lambda + \frac{k(1-\rho)}{\tau} + \frac{(1+\rho)h\lambda\tau}{2(1-\rho)} \end{aligned}\right\}$ when $\frac{\lambda\tau}{1-\rho} > \sqrt{\frac{2k\lambda}{(1+\rho)h}}$

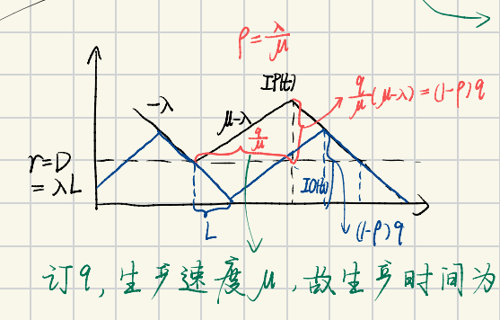
Finate production rate ⑥
产品立即可用
提前期 L
生产速率 $\mu > \lambda$
Utilization $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$
不缺货
by Zero-I：$IP(t^-) = r = D$，订货 q

表达式：$C(q) = (k+cq)\overline{OF} + h\overline{I}$
$\overline{OF} \to \frac{\lambda}{q}$　$\overline{I} \to \frac{(1-\rho)q}{2}$

最优解：$q^* = \sqrt{\frac{2k\lambda}{h(1-\rho)}}$
$C(q^*) = c\lambda + \sqrt{2k\lambda h(1-\rho)}$

ρ→1 时，q 的决策不具有 robust 性

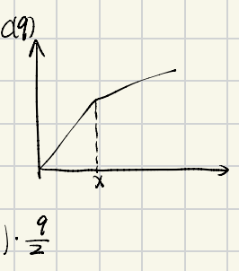




订 q，生产速度 μ，故生产时间为 $\frac{q}{\mu}$

折扣相关

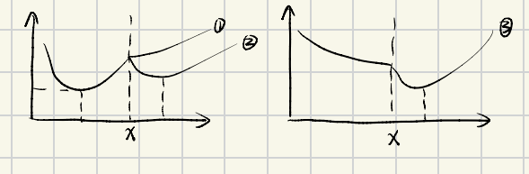
增量折扣
只考虑一个折点
$h = \underline{h} + \alpha\frac{C(q)}{q}$



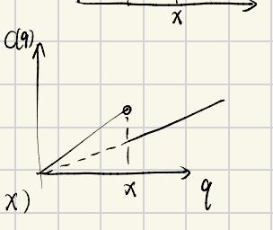
Total cost：
$\phi(q) = (k + C(q))\frac{\lambda}{q} + \left(\underline{h} + \alpha\frac{C(q)}{q}\right)\cdot\frac{q}{2}$

$= \begin{cases} \phi_0(q): (k + C_0q)\frac{\lambda}{q} + (\underline{h} + \alpha C_0)\frac{q}{2} & (q \le x) \\ \phi_1(q): (k + C_0x + C_1(q-x))\frac{\lambda}{q} + \left(\underline{h} + \alpha\frac{C_0x + C_1(q-x)}{q}\right)\frac{q}{2} \\ = (k + (C_0 - C_1)x + C_1q)\frac{\lambda}{q} + \left(\underline{h} + \alpha\frac{(C_0-C_1)x + C_1q}{q}\right)\frac{q}{2} \\ = (k_1 + C_1q)\frac{\lambda}{q} + (\underline{h} + \alpha C_1)\frac{q}{2} + \alpha\frac{(C_0-C_1)x}{2} & (q > x) \end{cases}$

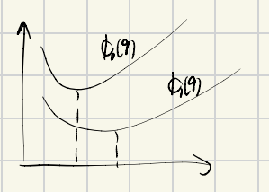
求导有 $\phi_1'(x) < \phi_0'(x)$
$\phi_1(x) = \phi_0(x)$
三种情况

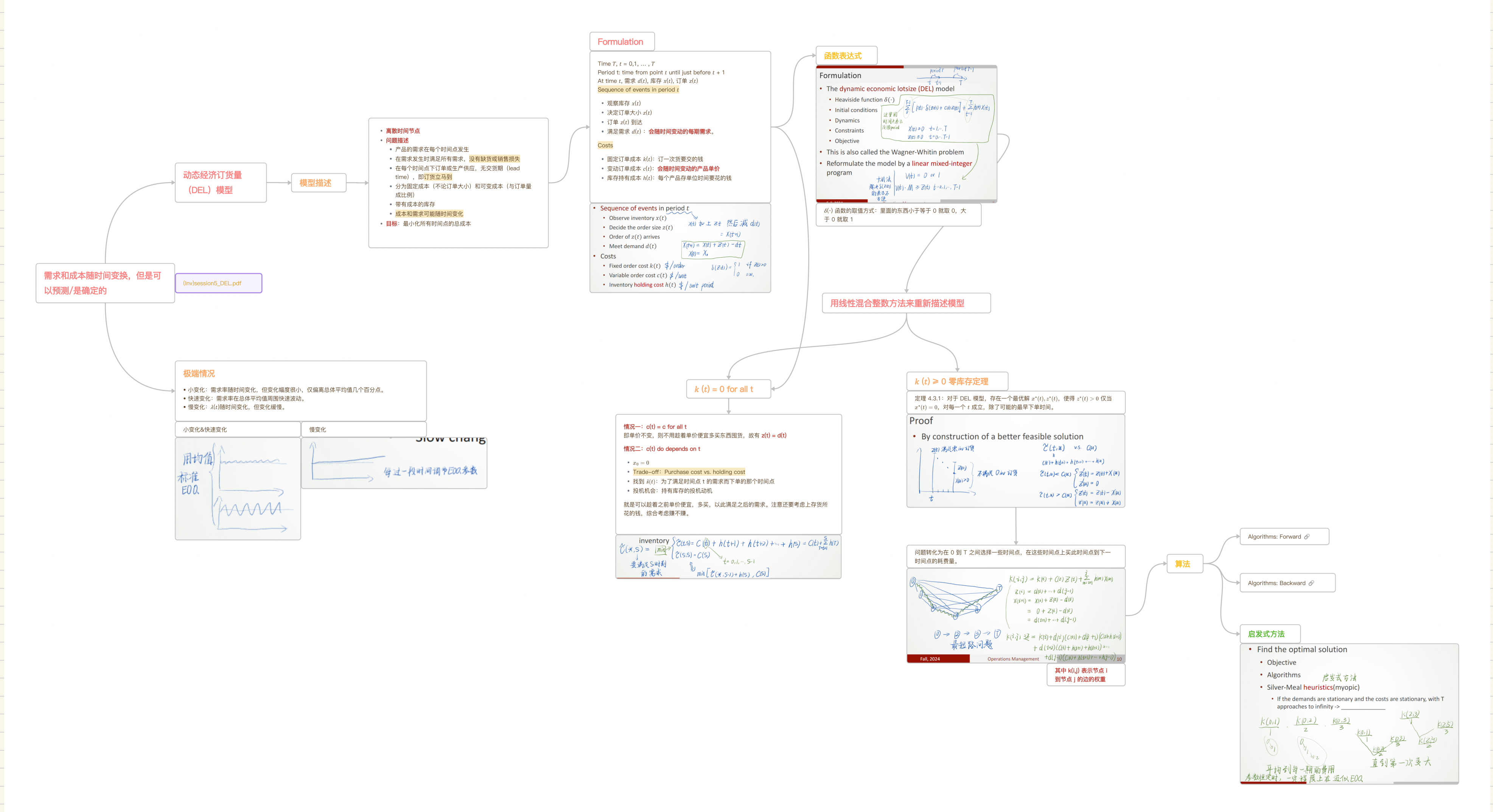


全量折扣 单折点
$h = \underline{h} + \alpha C_i$



Total cost：
$\begin{cases} \phi_0(q): (k + C_0q)\frac{\lambda}{q} + (\underline{h} + \alpha C_0)\frac{q}{2} & (q \le x) \\ \phi_1(q): (k + C_1q)\frac{\lambda}{q} + (\underline{h} + \alpha C_1)\frac{q}{2} & (q > x) \end{cases}$





需求和成本随时间变换，但是可以预测/是确定的

(Inv)session5_DEL.pdf

动态经济订货量（DEL）模型

模型描述

- 离散时间节点
- 问题描述
  - 产品的需求在每个时间点发生
  - 在需求发生时满足所有需求，没有缺货或销售损失
  - 在每个时间点下订单或生产供应，无交货期（lead time），即订货立马到
  - 分为固定成本（不论订单大小）和可变成本（与订单量成比例）
  - 带有成本和库存
  - 成本和需求可能随时间变化
- 目标：最小化所有时间点的总成本

Formulation

Time T, t = 0,1, … , T
Period t: time from point t until just before t + 1
At time t, 需求 d(t), 库存 x(t), 订单 z(t)
Sequence of events in period t

- 观察库存 x(t)
- 决定订单大小 z(t)
- 订单 z(t) 到达
- 满足需求 d(t)：会随时间变动的每期需求。

Costs

- 固定订单成本 k(t)：订一次货要交的钱
- 变动订单成本 c(t)：会随时间变动的产品单价
- 库存持有成本 h(t)：每个产品存单位时间要花的钱

- Sequence of events in period t
  - Observe inventory x(t)
  - Decide the order size z(t)
  - Order of z(t) arrives
  - Meet demand d(t)
- Costs
  - Fixed order cost k(t) \$/order
  - Variable order cost c(t) \$/unit
  - Inventory holding cost h(t) \$/unit period

x(t) 加上 z(t) 然后减 d(t) = x(t+1)
x(t+1) = x(t) + z(t) − d(t)
x(0) = x₀
$\delta(z(t)) = \begin{cases} 1 & \text{if } z(t) > 0 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$

函数表达式

Formulation
- The dynamic economic lotsize (DEL) model
  - Heaviside function δ(·)
  - Initial conditions
  - Dynamics
  - Constraints
  - Objective
- This is also called the Wagner-Whitin problem
- Reformulate the model by a linear mixed-integer program

δ(·) 函数的取值方式：里面的东西小于等于 0 就取 0，大于 0 就取 1

用线性混合整数方法来重新描述模型

极端情况

- 小变化：需求率随时间变化，但变化幅度很小，仅偏离总体平均值几个百分点。
- 快速变化：需求率在总体平均值周围快速波动。
- 慢变化：λ(t)随时间变化，但变化缓慢。

小变化&快速变化
用均值
标准
EOQ

慢变化
每过一段时间调节EOQ参数

k (t) = 0 for all t

情况一：c(t) = c for all t
即单价不变，则不用趁着单价便宜多买东西囤货，故有 z(t) = d(t)

情况二：c(t) do depends on t

- $x_0 = 0$
- Trade-off：Purchase cost vs. holding cost
- 找到 s̄(t)：为了满足时间点 t 的需求而下单的那个时间点
- 投机机会：持有库存的投机动机

就是可以趁着之前单价便宜，多买，以此满足之后的需求。注意还要考虑上存货所花的钱，综合考虑赚不赚。

inventory
要满足 S 时刻的需求
min [C(∗, S−1) + h(S), C(S)]

k (t) ≥ 0 零库存定理

定理 4.3.1：对于 DEL 模型，存在一个最优解 $x^*(t), z^*(t)$，使得 $z^*(t) > 0$ 仅当 $x^*(t) = 0$，对每一个 t 成立，除了可能的最早下单时间。

Proof
- By construction of a better feasible solution

问题转化为在 0 到 T 之间选择一些时间点，在这些时间点上买此时间点到下一时间点的耗费量。

最短路问题

Fall, 2024　Operations Management　10

其中 k(i,j) 表示节点 i 到节点 j 的边的权重

算法

Algorithms: Forward
Algorithms: Backward

启发式方法

- Find the optimal solution
  - Objective
  - Algorithms　启发式方法
  - Silver-Meal heuristics(myopic)
    - If the demands are stationary and the costs are stationary, with T approaches to infinity -> ______

平均到每一期的费用
参数恒定时，一定程度上在近似 EOQ
直到第一次变大

Newsvendor Problem

一个单周期的库存模型
不知道需求量，但知道需求的分布

单位售价：r > 0
单位成本：0 < c < r
需求数量：D continuous random variable D ≥ 0

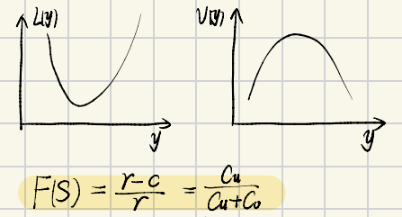
$E(D) = \mu$　累积分布函数 F
$Var(D) = \sigma^2$　概率密度函数 f

订购后的库存水平 y 决策变量
目标函数 v(y)：期望利润

$v(y) = E(r\min(y,D) - cy) = rE(\min(y,D)) - cy$
$= E((r-c)y - r(y-D)^+)$
$= (r-c)\mu - L(y)$
$L(y) = \underbrace{cE(y-D)^+}_{C_o} + \underbrace{(r-c)E(D-y)^+}_{C_u}$
订多了的损失　潜在没有收到的收入

验证：$E((r-c)D) - E(c(y-D)^+ + (r-c)(D-y)^+)$
$= E((r-c)(D - (D-y)^+) - c(y-D)^+)$
$= E((r-c)(D - (D-y)^+) - r(y-D)^+ + (r-c)(y-D)^+)$
$= E((r-c)(D + (y-D)^+ - (D-y)^+) - r(y-D)^+)$
即要说明：$D + (y-D)^+ - (D-y)^+ = y$
$(y-D)^+ - (D-y)^+ = y - D$
$\begin{cases} y \ge D \text{ 时} & y - D = y - D \\ y < D \text{ 时} & -(D-y) = y - D \end{cases}$

Solution：临界分位数解
S：订货后的最佳库存水平
最佳缺货概率：$1 - F(S)$



$F(S) = \frac{r-c}{r} = \frac{C_u}{C_u+C_o}$
关键比值

推导：令 $v'(y) = 0$
有 S 满足 $\int_S^\infty f(x)dx = \frac{c}{r}$
$1 - F(S) = \frac{c}{r}$
$F(S) = 1 - \frac{c}{r}$
$= \frac{r-c}{r} = \frac{C_u}{C_u+C_o}$

证明 V(y) 是凹函数
$V(y) = r\cdot E(\min(D,y)) - cy$
$= r\cdot\left(\int_0^y x f(x)dx + \int_y^\infty y\cdot f(x)dx\right) - cy$
其中 f(x) 是 D 的概率密度函数
$v'(y) = \frac{dv(y)}{dy} = r\cdot\frac{d}{dy}\left(\int_0^y x\cdot f(x)dx + \int_y^\infty y\cdot f(x)dx\right) - c$
直观　莱布尼兹积分法则 $\frac{d}{dy}\int_{a(y)}^{b(y)} g(x,y)dx = g(b(y),y)\cdot\frac{db(y)}{dy} - g(a(y),y)\cdot\frac{da(y)}{dy} + \int_{a(y)}^{b(y)}\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}dx$
$= r\cdot\left(yf(y) + \int_y^\infty f(x)dx + y(-f(y))\right) - c$
$= r\int_y^\infty f(x)dx - c$
$v''(y) = r\cdot\frac{d}{dy}\int_y^\infty f(x)dx$
$= -rf(y) < 0$
v(y) 关于 y 是凹的

因为 $F(S) = \frac{r-c}{r}$
r 与 c 差的越多，F(S) → 1
越会一直满足你的需求
故看得到的是毛利率大的

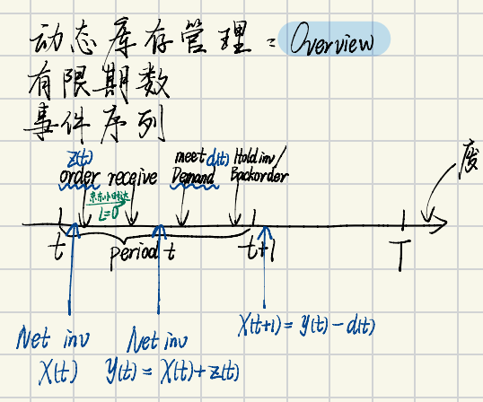
Ext：HW4. Q2
c = 10
r = 30
每单位未售出的残值：s = 5
每单位短缺成本：π = 12
$v(y) = E(r\min(D,y) - cy + s(y-D)^+ - \pi(D-y)^+)$
$= (r-c)\mu - \underbrace{(cE(y-D)^+ + (r-c)E(D-y)^+)}_{L(y)} + s(y-D)^+ - \pi(D-y)^+$
$= (r-c)\mu - ((c-s)E(y-D)^+ + (r-c+\pi)(D-y)^+)$
C_o 过剩成本 overage cost　C_u 缺货成本 underage cost
前面已知此模型下 V(y) 凹 & $F(S) = \frac{C_u}{C_u+C_o} = \frac{r-c+\pi}{r-s+\pi}$　D 的累积分布函数

面对离散 D 时，最优订购量应为最小的 y s.t. $F(y) \ge \frac{C_u}{C_u+C_o}$

随机需求和库存管理
设定：
随机性需求
离散时间
有限规划期
允许延期交货 Backorder
Lead time = 0 无提前期
Setup cost = 0

基本 trade-off
too many & too few.
Holding cost & backorder cost

动态库存管理：Overview
有限期数
事件序列

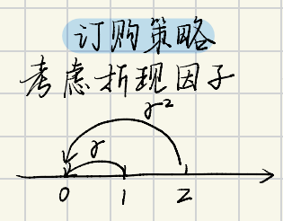


废物价值　基本 c 原价回收，or 原价补货　$cE(X(T))$

Cost in period t (for t ≤ T−1)

采购成本：$c\times(y(t) - x(t))$ ← linear in y(t)
Procurement Cost
Holding & backorder Cost　$C(y(t)) = E(h(y(t) - d(t))^+ + b(d(t) - y(t))^+)$
每一个产品持货一期的成本

订购策略
考虑折现因子



目标：最小化折现期望总成本 $\begin{cases} \text{Cost in } t=0 \text{ to } T-1 \\ \text{Terminal/Salvage value.} \end{cases}$

先从第 T−1 期开始看
给定 X(T−1) = x
find y(T−1) s.t. 最小化折现期望总成本 V(t,x)

$\min_{y(T-1)\ge x} c(y(T-1) - x) + E(h(y(T-1) - d(T-1))^+ + b(d(T-1) - y(T-1))^+) - \gamma c\cdot E(y(T-1) - d(T-1))$

$= c(y-x) + h\int_0^y (y-\xi)f(\xi)d\xi + b\int_y^\infty(\xi - y)f(\xi)d\xi - \gamma cy + \gamma cE(d(T-1))$
$= -cx + \gamma cE(d(T-1)) + c(1-\gamma)y + h\int_0^y(y-\xi)f(\xi)d\xi + b\int_y^\infty(\xi-y)f(\xi)d\xi$
↓ H 函数怎么凸凸的？
H(T−1, y) 关于 y 的项（与 x 无关）

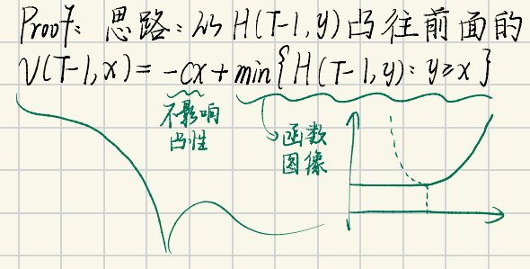
$\frac{\partial H(T-1,y)}{\partial y} = 0 \Rightarrow y^*$ 如凸 $\begin{cases} \text{if } x > y^* & \text{订 } 0 \\ \text{if } x \le y^* & y^* - x \end{cases}$

Proof：
$\frac{dH(T-1,y)}{dy} = c(1-\gamma) + h\int_0^y f(\xi)d\xi - b\int_y^\infty f(\xi)d\xi$
$= c(1-\gamma) + hF(y) - b(1 - F(y))$
$= c(1-\gamma) - b + (h+b)F(y)$
$\frac{d^2H(T-1,y)}{dy^2} = (b+h)f(y)$
故 H(T−1, y) 是凸的

从 t 期开始看
V(t,x)：从时间 t 到规划期结束的最小期望折现成本
period t begin with x(t) = x
$V(t,x) = \min_{y\ge x}\{c(y-x) + C(y) + \gamma EV(t+1, y - d(t))\}$　动态规划
采购费用　当期存货/缺货 Cost
$= -cx + \min\{H(t,y): y \ge x\}$　理解：x 是无法改变的 故 min H ⟺ min V
其中 $C(y) = E(h(y - d(t))^+ + b(d(t) - y)^+)$
$H(t,y) = cy + C(y) + \gamma EV(t+1, y - d(t))$

最优订货策略结构：基库存策略
$\exists y_t^* \Rightarrow \begin{cases} \text{if } x < y_t^* & \text{order}: y_t^* - x \\ \text{if } x \ge y_t^* & \text{order}: 0 \end{cases}$ ⟸ 凸函数可以保证这个性质

Proof：思路：从 H(T−1, y) 凸往前面的时间点推
$V(T-1,x) = -cx + \min\{H(T-1,y): y \ge x\}$
不影响凸性　函数图像



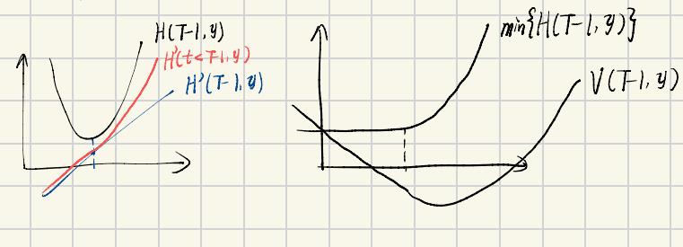
故 V(T−1, x) 凸
$H(T-2,y) = cy + C(y) + \gamma EV(T-1, y - d(t))$
$C(y) = E(h(y - d(t))^+ + b(d(t) - y)^+)$ (t = T−2)
其中 cy + C(y) 部分与 H(T−1, y) 同理是凸的 凸！
又有 V(T−1, x) 凸
故 H(T−2, y) 凸
以此往前递推
每一层 V(t,x) 都凸　凸，哎，我就要凸！

结论总结
Thm 9.4.1 For all t
(a) H(t,y) 是关于 y 的凸函数
(b) 基库存策略是最优的：
最优的基库存策略是使 H(t,y) min 的 y 的最小值
(c) V(t,x) 是关于 x 的凸函数

结论可以扩展至变化成本
即有 c(t), h(t), b(t)

恒定的最优库存水平
当 $V(T,x) = -cx$，c(t), h(t), b(t) 常数
d(t) iid，累积分布函数 F

$F(S) = \frac{b - (1-\gamma)c}{h+b}$ is opt for every t



第二节 扩展
The myopic policy 短视政策　对比

Opt：
$V(t,x) = \min_{y\ge x}\{c(y-x) + C(y) + \gamma EV(t+1, y - d(t))\}$
采购费用　当期存货/缺货 Cost
$= -cx + \min\{H(t,y): y \ge x\}$
其中 $C(y) = E(h(y - d(t))^+ + b(d(t) - y)^+)$
$H(t,y) = cy + C(y) + \gamma EV(t+1, y - d(t))$

Myopic：
$V^+(t,x) = \min\{H(t,y): y \ge x\}$　$= cx + V(t,x)$
$V^+(T,x) = 0$
$H(t,y) = cy + hE(y - d(t))^+ + bE(d(t) - y)^+ + \gamma E[-c(y - d(t)) + V^+(t+1, y - d(t))]$
近视，只考虑最优化我的 y 显性出现在函数的部分
$C^+(t,y)$ 凸

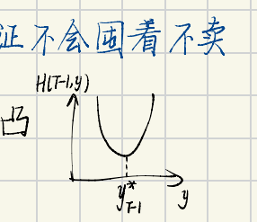
Opt policy：$S^*(t)$ s.t. $\min H(t,y)$　Myopic policy：$S^+(t)$ s.t. $\min C^+(t,y)$

Thm 9.4.2
(a) $S^*(t) \le S^+(t)$；in particular $S^*(T-1) = S^+(T-1)$
(b) If $S^+(t) \le S^*(t+1)$, then $S^*(t) = S^+(t)$
(c) If $S^+(t) \ge S^+(t+1)$, then $S^*(t) \ge S^*(t+1)$
(d) If $S^+(t) \le S^+(t+1)$ and $S^*(t+1) \le S^*(t+2)$, then $S^*(t) \le S^*(t+1)$
(e) $S^*(t) \ge \min_{u\ge t}\{S^+(u)\}$

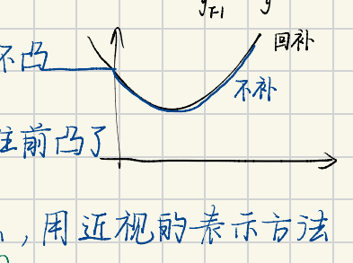
Lost sales
缺货不补
$V(t,x) = \min_{y\ge x}\{c(y-x) + C(y) + \gamma EV(t+1, (y - d(t))^+)\}$
采购费用　当期存货/缺货 Cost
$= -cx + \min\{H(t,y): y \ge x\}$ → 缺货只赔一次
其中 $C(y) = E(h(y - d(t))^+ + b(d(t) - y)^+)$
$H(t,y) = cy + C(y) + \gamma EV(t+1, (y - d(t))^+)$

$b + h \ge \gamma c$　保证不会囤着不卖

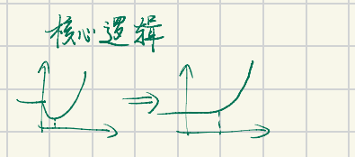
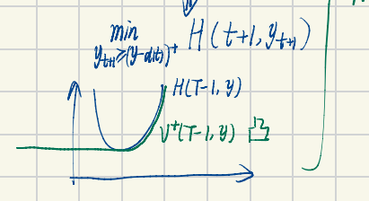
H(T−1, y) 求导知凸



V(T−1, x) 不凸
不能一直往前凸了



换个方法，用近视的表示方法 $V^+(t,x) = \min_{y\ge x} H(t,y) = \underbrace{C^+(t,y)}_{\text{凸}} + \gamma EV^+(t+1, (y - d(t))^+)$
$\Updownarrow$
$\min_{y_{t+1} \ge (y - d(t))^+} H(t+1, y_{t+1})$
$\left.\right\}$ H(T−2, y) 凸 可以往前一直凸

核心逻辑